Devoir surveillé numéro 4

Exercice 1 *(5 points)*

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E)\ :\ 8x - 13y = 1$.
   On pourra utiliser la solution particulière $(5; 3)$.
2. Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite d d'équation : $y = \dfrac{13}{27}x - \dfrac{1}{81}$.
   Le but de cette question est de savoir si la droite d passe par un ou des point(s) à coordonnées entières.
   a) Justifier que le problème est équivalent à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $39x - 81y = 1$.
   b) Expliquer pourquoi cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$, et conclure.

Exercice 2 *(5 points)*

Il est rappelé que $a \equiv b\ [n]$ signifie que n divise $a - b$.

1. **Dans un sens**
   a) D'un nombre entier n, on sait qu'il est congru à 3 modulo 77.
   Démontrer qu'alors : $n \equiv 3\ [7]$ et $n \equiv 3\ [11]$.
   b) De même, démontrer l'implication :
   $$n \equiv 3\ [40] \Longrightarrow \big(n \equiv 3\ [4] \text{ et } n \equiv 3\ [10]\big)$$
2. **Réciproque**
   On s'intéresse aux réciproques des deux implications de la première question.
   a) À l'aide du théorème de Gauss, démontrer la réciproque de la propriété de la question 1.a) :
   $$\big(n \equiv 3\ [7] \text{ et } n \equiv 3\ [11]\big) \Longrightarrow n \equiv 3\ [77]$$
   b) Pour la réciproque de la question 1.b), le théorème de Gauss ne s'applique pas. Pourquoi ?
   c) Trouver un contre-exemple, montrant que la réciproque du 1.b) est fausse.

Exercice 3 *(5 points)*

1. Écrire sous forme trigonométrique : $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
2. Soient les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Déterminer une mesure de $\theta = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.
3. Après avoir déterminé la forme algébrique de $\dfrac{z_B}{z_A}$, préciser les valeurs exactes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 4 *(5 points)*

1. Déterminer l'écriture trigonométrique du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Soit θ un nombre réel et soit $z = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(1 - \mathrm{i})$.
   a) Déterminer les parties réelle et imaginaire de z, en fonction de θ.
   b) Déterminer un argument et le module de z, puis écrire z sous forme trigonométrique.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\quad \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Et les lignes droites, les rectangles, les triangles, les losanges, les carpettes et les dalles, œuvres de l'homme, et les veines, les artères, les méandres, les courbes, les vrilles, les boucles, les volutes, les zébrures, œuvres du vent et de l'eau.

Jean Cocteau, Tour du monde en 80 jours