Devoir surveillé numéro 3

Exercice 1 *(12 points)*

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20 % des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10 % des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. a) Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

   b) Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

   c) On admet sans démonstration que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = M^n U_0$.
   Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

   b) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient : $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{1-0,7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0,7^n}{3} & \dfrac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$.

   Que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

Exercice 2 *(8 points)*

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

1. Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10}.

2. On considère la matrice : $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer F^2 et F^3. On pourra utiliser la calculatrice.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$

4. a) Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que :

   $$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$.

5. On donne $u_{12} = 144$.
   En utilisant la question précédente, démontrer qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
   Donner la longueur des deux autres côtés.

Qui serait assez insensé pour mourir sans avoir fait au moins le tour de sa prison ?

Marguerite Yourcenar, L'œuvre au noir.