Devoir surveillé numéro 3

Exercice 1 *(11 points)*

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,; 0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par : $e(t) = 4\,[U(t) - U(t-2)]$.
   a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.
   b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e. Déterminer $E(p)$.
2. On considère la fonction s telle que : $4s'(t) + s(t) = e(t)$ et $s(0) = 0$.
   On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.
   Démontrer que : $S(p) = \dfrac{1}{p\left(p + \dfrac{1}{4}\right)}\left(1 - e^{-2p}\right)$.
3. Déterminer les réels a et b tels que : $\dfrac{1}{p\left(p+\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p + \dfrac{1}{4}}$.
4. Compléter le tableau ci-contre dans lequel f représente la fonction causale associée à F.

$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p}e^{-2p}$	$\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{4}}$	$\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{4}}e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.
   b) Vérifier que : $\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4e^{-\frac{t}{4}}\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

Exercice 2 *(9 points)*

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, vérifiant :

$$4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t) = 20 \text{ pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[,$$
$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0$$

1. On admet que la fonction f, nulle sur $]-\infty; 0]$, et ses dérivées f' et f'' ont des transformées de Laplace. On note $F(p) = \mathcal{L}\,[f(t)]$ où F est la transformée de Laplace de f.
   a) Donner les expressions de $\mathcal{L}\,[f''(t)]$ et $\mathcal{L}\,[f'(t)]$ en fonction de $F(p)$.
   En déduire $\mathcal{L}\,[4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t)]$ en fonction de $F(p)$.
   b) Déterminer $\mathcal{L}\,[20\mathcal{U}(t)]$ où $\mathcal{U}$ est l'échelon unité.
   c) Déduire des questions a) et b) que $F(p) = \dfrac{20}{p(4p^2 + 8p + 5)}$
2. Dans la suite, on admet que $F(p)$ peut aussi s'écrire:

$$F(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25} - 2\frac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$$

   a) Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ où $\mathcal{L}^{-1}$ désigne la transformation de Laplace inverse.
   b) Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2 + 0,5^2}\right)$ et en déduire $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$
   c) Déterminer $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{p^2 + 0,5^2}\right)$ et en déduire $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$
   d) Déterminer alors la fonction f.

Et la splendeur des cartes, chemin abstrait qui mène à l'imagination concrète,
lettres et traits irréguliers qui débouchent sur la merveille.

Fernando Pessoa, Poésies d'Alvaro de Campos.