Devoir surveillé numéro 2

Exercice 1 *(4,5 points)*

Soit N un nombre entier à trois chiffres : a_0 est son chiffre des unités, a_1 son chiffre des dizaines, a_2 est son chiffre des centaines.
Son écriture décimale est donc : $N = \overline{a_2a_1a_0}$ c'est-à-dire : $N = a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$

1. Justifier que $10 \equiv -1$ [11] et que $100 \equiv 1$ [11].
2. Démontrer que N est divisible par 11 si et seulement si 11 divise $a_0 - a_1 + a_2$.
3. Un critère classique de divisibilité par 11 pour les nombres à trois chiffres est exposé ci-dessous sur un exemple :

   > *352 est divisible par 11 car le chiffre central est la somme des deux autres :* $3 + 2 = 5$.

   Au vu des questions précédentes, expliquer si ce critère est valide, et s'il permet de trouver tous les nombres de 3 chiffres divisibles par 11.

Exercice 2 *(7 points)*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la résolution de quelques équations du premier degré dans $\mathbb{Z}$ en raisonnant modulo 8.

1. Dans la feuille de calcul incomplète ci-contre :
   - a et b sont des entiers compris entre 0 et 7 ;
   - le résultat pour chaque couple $(a; b)$ est le reste de la division euclidienne de $a \times b$ par 8.

   a) Un premier essai avec la formule suivante, entrée dans la cellule `B2` et recopiée dans tout le tableau jusqu'en `I9`, a mené à un échec :

   ```
   =MOD(A$2*B1 ; 8)
   ```

   Proposer une formule correcte.

   b) Compléter le tableau.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$a \backslash b$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	1	2	3	4	5	6	7
4	2	0	2	4	6				6
5	3	0	3	6					5
6	4	0	4						4
7	5	0	5						3
8	6	0	6						2
9	7	0	7	6	5	4	3	2	1

2. À l'aide du tableau, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations d'inconnue n suivantes.

$$16n - 43 \equiv 9n + 1 \ [8] \qquad 7n - 27 \equiv 2n \ [8] \qquad 7n \equiv 5n + 14 \ [8]$$

Exercice 3 *(4,5 points)*

Les lettres de l'alphabet sont numérotées, en démarrant à 0 pour la lettre A. Ainsi, le rang de la lettre J est 9.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Un message est codé lettre par lettre selon la méthode suivante :
- *Étape* 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
- *Étape* 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $21m + 5$ par 26 et on le note p.
- *Étape* 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder ainsi le message de deux lettres : `PI`.
2. Démontrer que si $21m + 5 \equiv p$ [26], alors $m \equiv 5p + 1$ [26].
3. Décoder alors la lettre G.

Exercice 4 *(4 points)*

Dans l'algorithme ci-contre :

k et n sont des entiers ; L est une liste.

```
L ⟵ []
k ⟵ 2
Tant que n > 1 :
    Tant que k divise n :
        Ajouter k à L
        n ⟵ n/k
    Fin Tant que
    k ⟵ k + 1
Fin Tant que
```

1. En détaillant les étapes, exécuter cet algorithme avec $n = 20$ au démarrage. Donner alors le contenu de la liste L à la fin de l'exécution de l'algorithme.
2. On suppose dans cette question que $n = 45$ au démarrage. Le nombre 9 apparaîtra-t-il dans la liste L après exécution de l'algorithme ? Justifier la réponse.
3. Dans le cas général, expliquer en peu de mots le lien entre le nombre contenu dans n au départ, et les nombres contenus dans la liste L à la fin de l'exécution de l'algorithme.

Pensées à la nage merveilleuse,
qui glissez en nous, entre nous, loin de nous,
loin de nous éclairer, loin de rien pénétrer ;

étrangères en nos maisons,
toujours à colporter,
poussières pour nous distraire et nous éparpiller la vie.

Henri Michaux.