Devoir surveillé numéro 1

Exercice 1 *(6 points)*

1. Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ $\quad z_2 = 1 - 2\mathrm{i}$

   Écrire sous forme algébrique, en détaillant les calculs : $z_1 \times \overline{z_2}$ $\quad \dfrac{1}{z_1}$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2}$

2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$: $1 + \mathrm{i}z = 3z + 2\mathrm{i}$ $\quad z^2 - 2z + 2 = 0$

Exercice 2 *(8 points)*

Le plan complexe est muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe : $z' = (1 + \mathrm{i})z + 1$

1. On rappelle que O est l'origine du repère. Soit de plus A d'affixe $z_A = 1 - \mathrm{i}$.
   Calculer les affixes de O' et A'.
   Placer A, O', A' sur une figure.
2. Démontrer que le seul nombre complexe z tel que $z' = z$ est i.
   On note Ω le point d'affixe i.
3. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z' - z_\Omega = (1 + \mathrm{i})(z - z_\Omega)$.
4. Soit M un point du cercle de centre Ω, de rayon 1.
   Démontter que M' appartient à un cercle de centre Ω dont on précisera le rayon.

Exercice 3 *(6 points)*

Le plan complexe est muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Le point $M(t)$ est donné par son affixe : $z = 2 + t\mathrm{i}$, où t est un nombre réel.

1. Tracer le lieu décrit par $M(t)$ lorsque t varie.
2. À tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe :

$$z' = (-1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}$$

   a) On note $A = M(0)$ et $B = M(3)$.
      Calculer les affixes de A' et B'.

   b) Démontrer que tout point M' appartient à la droite $(A'B')$.

Comment répondre à la question « Comment ça va ».

Pythagore : « Tout est d'équerre. »
Platon : « Idéalement bien. »
Erasme : « Follement bien. »
Descartes : « Bien, je pense. »
Galilée : « Ça tourne rond. »
Vivaldi : « Ça dépend des saisons. »
Newton : « Votre question tombe à pic ! »
Montgolfier : « Je mets la pression ! »
Darwin : « On s'adapte. . . »
Dracula : « J'ai de la veine. »

Umberto Eco, Comment voyager avec un saumon.