Devoir surveillé numéro 1

Exercice 1 *(10 points)*

La fonction f est périodique sur $\mathbb{R}$, de période $T = 2$. Son expression sur $[0; 2[$ est : $f(t) = t$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2; 6[$.
2. Soit le développement en série de Fourier associé à f : $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big)$.
   a) Calculer a_0.
   b) Démontrer que pour n entier non nul, $a_n = 0$ et que $b_n = -\dfrac{2}{n\pi}$.
3. La formule de Parseval permet d'écrire : $(E_f)^2 = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n^2 + b_n^2\big)$.
   a) Calculer, à 10^{-2} près : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{4}\big(a_n^2 + b_n^2\big)$.
   b) Calculer le carré de la valeur efficace de f : $(E_f)^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^2 f(t)^2\,dt$.

Exercice 2 *(10 points)*

Soit le signal périodique de période $T = 2\pi$, impair, tel que :

$$f(t) = 1 \text{ sur }]0; \pi[\qquad \text{et} \qquad f(0) = f(\pi) = 0.$$

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. On prendra comme unité $1\,cm$ pour 1 sur l'axe des abscisses et $5\,cm$ pour 1 sur l'axe des ordonnées.
2. Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\big)$ le développement en série de Fourier associé à f.
   a) Justifier que $a_n = 0$ pour tout nombre entier naturel n.
   b) On rappelle que, dans le cas d'un signal impair, $b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$ pour tout nombre entier naturel non nul n.
   Justifier que $\omega = 1$ et démontrer que $b_n = \dfrac{2}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big)$, pour tout nombre entier naturel non nul n.
3. On décide de ne conserver, dans le développement en série de Fourier donné au 2., que les termes de rang n inférieur ou égal à 5.
   a) Montrer que la fonction g ainsi obtenue est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = \dfrac{4}{\pi}\sin(t) + \dfrac{4}{3\pi}\sin(3t) + \dfrac{4}{5\pi}\sin(5t)$.
   b) Compléter après l'avoir reproduit le tableau de valeurs suivant (arrondir à 10^{-2}) :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	π
$g(t)$		1,19	0,89					

   c) Compléter le graphique de la question 1. par l'allure de la représentation graphique de g sur $[0; \pi]$ obtenue à l'aide des résultats de la question b) et d'une calculatrice graphique.
   Les résultats obtenus permettent d'observer l'approximation d'un signal périodique par le signal obtenu avc les premiers termes de son développement en série de Fourier.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\big) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t},\ (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt\ (k \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad c_0 = a_0.$$

$$\frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \quad ; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Sherlock Holmes : *Nos idées doivent être aussi vastes que la nature pour pouvoir en rendre compte.*

Arthur Conan Doyle, Une étude en rouge.