Devoir maison numéro 3

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ appartient à l'ensemble S.
2. Montrer qu'il existe exactement quatre matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ appartenant à l'ensemble S ; les expliciter.
3. a) Choisir deux entiers c et d premiers entre eux, et strictement supérieurs à 1.
   Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $dx - cy = 1$ (les inconnues sont x et y).

   b) En déduire qu'il existe une infinité de matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec les c et d choisis, qui appartiennent à l'ensemble S. Décrire ces matrices.

Partie B

Dans cette partie, on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

1. Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux.
2. Montrer que la matrice A est inversible ; donner sa matrice inverse A^{-1}, et vérifier que A^{-1} appartient à l'ensemble S.

Pour la fin de cet exercice, choisir quatre nombres entiers strictement supérieurs à 1 a, b, c et d, tels que la matrice A formée avec ces nombres appartienne à S.

3. Soient x et y deux entiers relatifs (ne pas choisir de valeurs !).
   On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   a) Exprimer x et y en fonction de x' et y'. La matrice A^{-1} peut être utile.

   b) On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'. Montrer que $D = D'$.
4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2022$, $y_0 = 337$ et pour tout entier naturel n :
   $$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$$
   En utilisant la question précédente, déterminer, pour tout entier naturel n, le PGCD des entiers x_n et y_n.

On louange les Premiers en les nommant Fondateurs, Rénovateurs, Justiciers, Mandataires du haut et pur Seigneur-Ciel... Mais comment donc rénover, comment restaurer l'ordre sans tout d'abord instaurer le désordre ?

Victor Segalen, Peintures.