Devoir maison numéro 1 - Corrigé et amendé

Préliminaire

Choisir deux nombres entiers b et k, strictement positifs et distincts.

Ω est le point du plan complexe d'affixe b.

Le polynôme P est donné par : $P(z) = z^2 - 2bz + b^2 + k^2$.

Écrire $P(z)$ de façon explicite (et réduite !), avec les valeurs choisies pour b et k.

Partie A — Premiers calculs

1. Résoudre $P(z) = 0$.
   On appelle A et B les images dans le plan complexes des deux solutions trouvées. Placer Ω, A et B sur une figure, qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. À tout réel t, on associe le point $M(t)$ dont l'affixe est :
   $$z = b + \frac{kt + k\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$$
   a) Écrire sous forme algébrique les affixes de $M(0)$, $M\left(\frac{1}{2}\right)$ et $M(-3)$. Placer ces points.
   b) Existe-t-il un réel t tel que $M(t)$ soit confondu avec A ? Justifier la réponse.
   c) Soit le point C d'affixe $b + k$.
   Justifier qu'il n'existe pas de réel t tel que $M(t) = C$.

Partie B — Lieu géométrique

1. Écrire l'affixe de $M(t)$ sous forme algébrique, en fonction de t. Bien identifier la partie réelle et la partie imaginaire.
2. Démontrer que $M(t)$ est sur l'axe des réels si et seulement si $t = -1$.
3. On note $C = M(0)$ et $D = M(-1)$.
   Démontrer que pour tout réel t, $M(t) \in (CD)$.
4. Soit la question :

   Existe-t-il un ou des réels t tels que $M(t)$ appartienne à l'axe des imaginaires purs ?

   Il s'agit d'une question **d'existence** : il n'est pas forcément demandé de trouver une ou des valeur(s) pour t.

   Il existe au moins deux méthodes de répondre à cette question : l'une calculatoire, l'autre géométrique.
   Décrire ces deux méthodes. En choisir une pour répondre à la question.

Partie B-bis — Lieu géométrique avec la bonne fonction

Pour ceux qui ont un peu de temps et de curiosité. . . Sans effet sur la note finale.

Corrigeons l'expression de z en fonction de t. Pour éviter les confusions avec la partie B, le point correspondant sera noté $N(t)$:

À tout réel t, on associe le point $N(t)$ dont l'affixe est :

$$z = b + \frac{kt + k\mathrm{i}}{t - \mathrm{i}}$$

1. Écrire l'affixe de $N(t)$ sous forme algébrique, en fonction de t. Bien identifier la partie réelle et la partie imaginaire.
2. Démontrer que pour tout réel t, $N(t)$ appartient à un cercle de centre Ω, dont on précisera le rayon.
   Tracer ce cercle.
3. Tout point du cercle est-il de type $N(t)$? Justifier la réponse.
4. Soit la question :

   Existe-t-il un ou des réels t tels que $N(t)$ appartienne à l'axe des imaginaires purs ?

   Il s'agit d'une question **d'existence** : il n'est pas forcément demandé de trouver une ou des valeur(s) pour t.

   Il existe au moins deux méthodes de répondre à cette question : l'une calculatoire, l'autre géométrique.
   Décrire ces deux méthodes. En choisir une pour répondre à la question.

L'horizon
Nous condamne au cercle.

Eugène Guillevic, Du domaine.