

Formulaire de Mathématiques

BTS CIM

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0$$

$$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$$

$$a^t = e^{t \ln a}, \text{ où } a > 0$$

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}, \text{ où } t > 0$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$$

$$\sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

$$e^{at} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)), \text{ où } a = \alpha + i\beta$$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty; \quad \text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0;$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0; \quad \text{Si } \alpha < 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0;$$

Croissances comparées à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty;$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0;$$

b) Dérivées primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	Arc sint	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	Arc tant	$\frac{1}{1+t^2}$
t^α ($\alpha \in \mathbb{E}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a;b]$:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

d) Développements limités

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \varepsilon(t)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \varepsilon(t)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \varepsilon(t)$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$, où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \dots$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu) e^{rt} \dots$ où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

3. SERIES DE FOURIER

f : fonction périodique de période T ;
développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \sum_{k \in \hat{\mathbb{I}}} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \hat{\mathbb{E}}^*, k \in \hat{\mathbb{I}}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (k \in \hat{\mathbb{I}}); \quad c_0 = a_0; \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \hat{\mathbb{E}}^*).$$

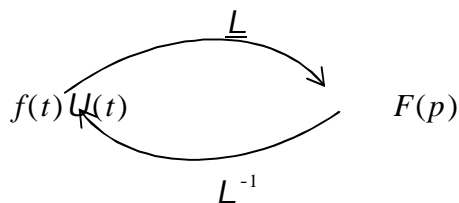
4. TRANSFORMATIONS DE LAPLACE

Fonctions usuelles

$$L(U(t)) = \frac{1}{p}; \quad L(tU(t)) = \frac{1}{p^2}; \quad L(t^n U(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \hat{\mathbb{E}});$$

$$L(e^{-\alpha t} U(t)) = \frac{1}{p + \alpha}; \quad L(\sin(\omega t) U(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \quad L(\cos(\omega t) U(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Propriétés



$f(\alpha t) U(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t - \tau) U(t - \tau)$	$F(p) e^{-\tau p}$
$f(t) e^{-\alpha t} U(t)$	$F(p + \alpha)$
$f'(t) U(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t) U(t)$	$p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$-tf(t) U(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u) U(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$

5. TRANSFORMATION EN Z

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{E}$	Transformée en Z $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n) = 1$	$(Ze)(z) = \frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z) = 1$
$r(n) = n$	$(Zr)(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
$c(n) = n^2$	$(Zc)(z) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n) = a^n, a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$	$(Zf)(z) = \frac{z}{z-a}$
$y(n) = a^n x(n), a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$	$(Zy)(z) = (Zx)\left(\frac{z}{a}\right)$
$y(n) = x(n - n_0), (n - n_0) \in \mathbb{E}$ ou $y(n) = x(n - n_0)e(n - n_0)$	$(Zy)(z) = z^{-n_0}(Zx)(z)$
$y(n) = x(n + 1)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0)]$
$y(n) = x(n + 2)$	$(Zy)(z) = z[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$
$y(n) = x(n + n_0), n_0 \in \mathbb{E}$	$(Zy)(z) = z^{n_0}[(Zx)(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2} \dots - x(n_0 - 1)z^{-(n_0-1)}]$