Equations différentielles du second ordre

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1.Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions $f(0) = 2$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2} + 2$

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle (E) : $x'' + 2x' + 5x = 40\,t\,\mathrm{e}^{-t}$

où x est une fonction de la variable réelle t, deux fois dérivable.

1° Résoudre l'équation différentielle (E) : $x'' + 2x' + 5x = 0$.

2° Déterminer une solution particulière de (E), qu'on notera $f(t)$, de la forme $f(t) = \alpha\, t\, \mathrm{e}^{-t}$ où α désigne un nombre réel.

3° En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4° Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 10\, t\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$. On donnera sa valeur exacte, puis sa valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 3:

Soit (E) l'équation différentielle : $x'' + 9x = 2\cos\omega t$, où l'inconnue x est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et ω un paramètre réel positif ou nul.

1° Résoudre l'équation (E_0) : $x'' + 9x = 0$

2° Résoudre l'équation (E) dans le cas où $\omega \neq 3$.

On cherchera une solution particulière x_1 telle que : $x_1(t) = A\cos\omega t$ où A est une fonction de ω.

3° Résoudre l'équation (E) dans le cas particulier où $\omega = 3$.

Soit (E_1) : $x'' + 9x = 2\cos 3t$.

On cherchera une solution particulière x_2 telle que : $x_2(t) = t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$, C_1 et C_2 étant deux nombres à déterminer.

Exercice 4:

1° Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = (12x - 5)\mathrm{e}^{x}$, où y représente une fonction numérique de la variable réelle x, deux fois dérivable.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$.

b) Rechercher sur $\mathbb{R}$ une solution particulière de (E) de la forme $y = z\,\mathrm{e}^{x}$ où z est une fonction polynôme du second degré de la variable réelle x : $x \mapsto z(x) = \alpha x^2 + \beta x$ que l'on déterminera.

En déduire l'ensemble des solutions de (E).

c) Trouver la solution particulière f de (E) pour laquelle on a : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

Exercice 5:

1° On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + y = x$$

où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x.

a) Donner la solution générale de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.

b) Vérifier que $y = x - 2$ est une solution particulière de (E)

c) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet, en ce point, l'axe des abscisses pour tangente.

Exercice 6:

Soit l'équation différentielle : (E) $y'' - y' - 6y = -6x - 1$, dans laquelle y est une fonction de x deux fois dérivable.

1° Résoudre l'équation différentielle : $y'' - y' - 6y = 0$.

2° Trouver une fonction polynomiale solution de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

3° Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(1, 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -2.

Exercice 7:

On considère les équations différentielles :

$$(E) \qquad y'' - 2y' + 2y = 0,$$

$$\text{et } (E') \quad y'' - 2y' + 2y = \frac{2x^3}{3} - 2x^2$$

où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ de la variable réelle x.

1° Résoudre l'équation différentielle (E).

2° Déterminer des réels a, b, c et d tels que la fonction φ, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

soit une solution de (E').

3° Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation (E').

4° On appelle Φ la solution de (E') dont la représentation graphique passe par l'origine du repère et admet comme tangente en ce point l'axe des abscisses.

Montrer que $\Phi(x) = e^x \cos x + \dfrac{x^3}{3} - x - 1$.

Exercice 8:

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = x + 4$, où y désigne une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g, définie pour tout réel x par $g(x) = x + 2$, est une solution particulière de (E). En déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie les deux conditions $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.